1　動的価格づけモデル：輸送の例題

動的価格づけ（dynamic pricing**）：価格を変えることによって需要を変化**

A**地点と**B**地点の往復輸送（**30 **万円）**

現在の価格は 1 **トンあたり** 3 **万円に固定**

A**から**B**の輸送量** 8 **トン**

B**から**A**の輸送量** 1 **トン**

現状：8 **トントラックで往復** $3 \times 8 + 3 \times 1 - 30 = 3$ **万円の赤字**

価格を変数として，需要と価格の関係が線形になっていると仮定

A**から**B**の輸送量** D_1 **は価格** P_1 **の関数として，**$D_1 = 11 - P_1$

B**から**A**の輸送量** D_2 **は価格** P_2 **の関数として，**$D_2 = 4 - P_2$

$D_1 \times P_1$ **ならびに** $D_2 \times P_2$ **の最大化**

$\Rightarrow P_1 = 5.5$ **万，**$P_2 = 2$ **万が最大収益**

輸送量は $D_1 = 5.5$ **トン，**$D_2 = 2$ **トン**

利益は，$5.5 \times 5.5 + 2 \times 2 - 30 = 4.25$ **万円**

5 **トントラックで**A**，**B**の地点の往復すると** 20 **万円**

A**から**B**への輸送量を上限の** 5 **トン** $\Rightarrow$ **価格** P_1 **を** 6 **万円に設定**

B**から**A**への輸送量は，最大利益をもたらすよう** $P_2 = 2$ **万円と設定**

利益は，$5 \times 6 + 2 \times 2 - 20 = 14$ **万円**

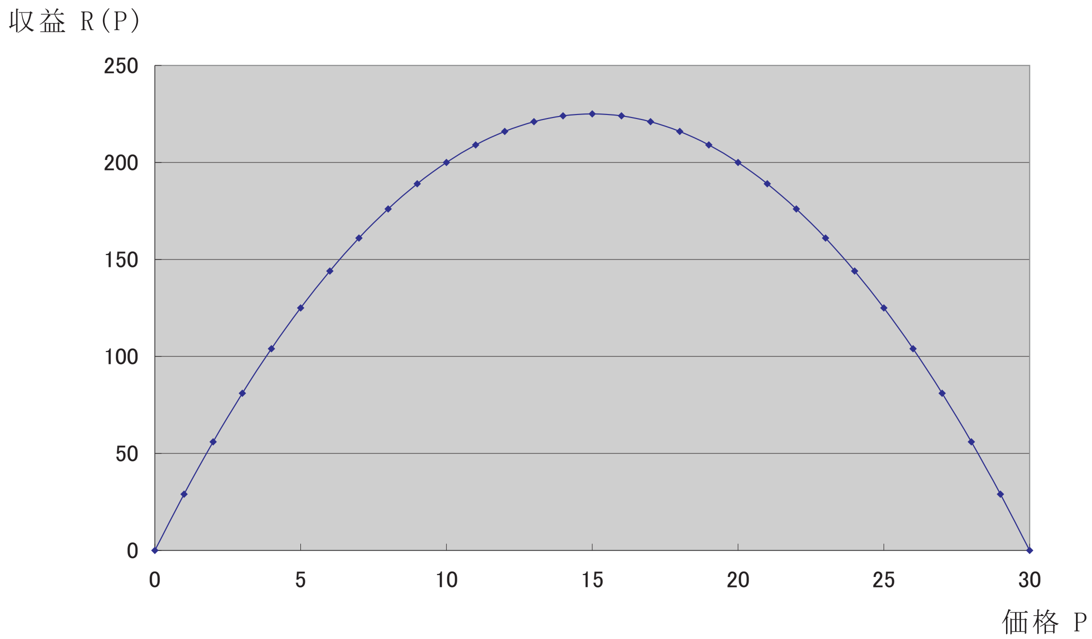
2　線形関数の場合

価格が $P_0\ (>0)$ **のときの製品の需要量** $D_0\ (>0)$
需要量の価格敏感度を表すパラメータを $a\ (>0)$

$$D(P) = -a(P - P_0) + D_0$$

収益 $R(P)$

$$R(P) = D(P)P = P(-aP + aP_0 + D_0)$$



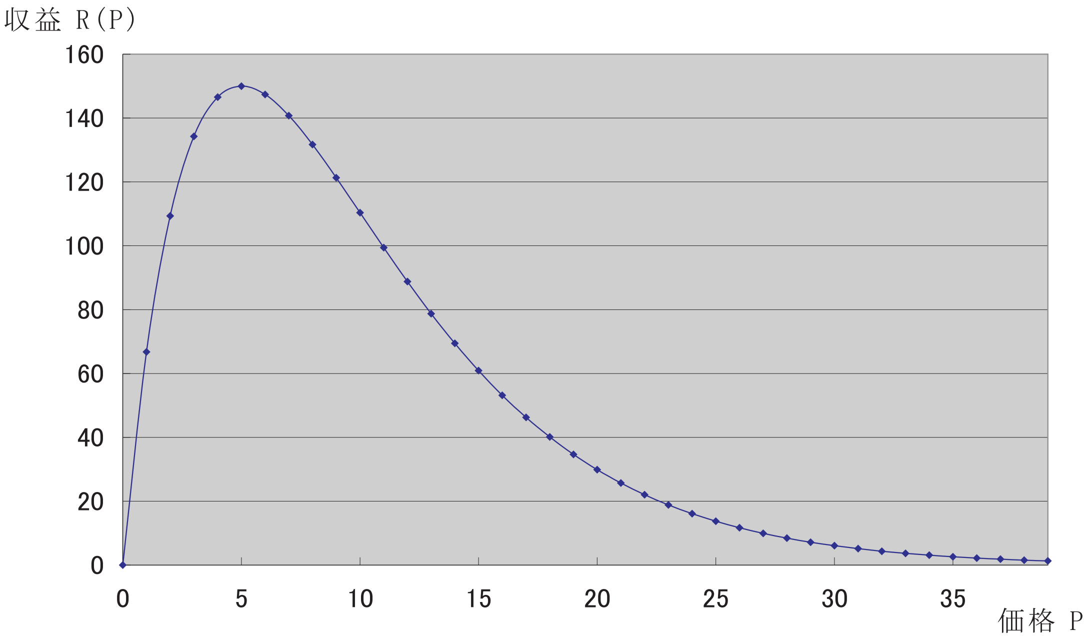
3　指数関数の場合

需要量の価格敏感度を表すパラメータを $a\ (>0)$

$$D(P) = D_0 \exp^{-a(P/P_0 - 1)}$$

収益 $R(P)$

$$R(P) = D_0 \exp^{-a(P/P_0 - 1)}\ P$$



4　価格が特定の離散値をとる場合

離散値の場合には，消費者の心理まで取り込んだ詳細な価格と需要量の関係を表現

例：1000**円を**980**円にすると売れるが，**1020**円を**1000**円にして売れない．**

取り得る価格 $P_1 < P_2 < \cdots < P_K$

対応する需要量 $D_1 > D_2 > \cdots > D_K$

対応する収益を $R_k = P_k D_k \ (k = 1, \cdots, K)$

5　効用関数によって需要が定まる場合

消費者選択（consumer choice）理論におけるランダム選択

ある顧客（消費者）が複数の商品 $1, \cdots, n$ **から** 1 **つの商品を選択**
商品 j **に対する固定的な効用** u_j **（価格をこれに含める）**
ランダムな効用 ϵ_j
商品 j **に対する効用** U_j **：**

$$U_j = u_j + \epsilon_j$$

顧客が商品 j **を選択する確率：**

$$\Pr(U_j = \max_{i=1,\cdots,n} U_i)$$

ロジットモデル（logit model）：ϵ_j **が独立かつ同一の二重指数（Gumbel）分布：**

$$\Pr(\epsilon_j \leq x) = \exp^{-\exp^{-(\frac{x}{\mu}+\gamma)}}$$

γ **はEuler定数（**$\approx 0.5772...$**），**μ **は（スカラー）パラメータ**
商品 j $(\in S)$ **が選択される確率：**

$$\Pr(j) = \frac{\exp^{\frac{u_j}{\mu}}}{\sum_{j=1}^{n} \exp^{\frac{u_j}{\mu}}}$$

6　価格を考慮した経済発注量モデル

品目は一定のスピードで消費

需要量 $D(P)$ ：品目の価格 P に対する関数

品目の品切れは許されず，発注リード時間は 0 である．

発注の固定費用は K 円

品目 1 個あたりの保管費用は 1 日で h 円

単位時間（1 日）あたりの費用：

$$\frac{KD(P)}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

最適発注量 Q^* ：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD(P)}{h}}$$

最適費用：

$$\sqrt{2KhD(P)}$$

収益 $-$ 費用（最小化）：

$$D(P)P - \sqrt{2KhD(P)}$$

線形需要価格関数の場合には，上式を最小にする問題は，3 次方程式の根を求める問題

7　価格を考慮した新聞売り子モデル(1)

h:　商品 1 単位が売れ残ったときに課せられる在庫費用．

c:　商品 1 単位の仕入れ（購入）費用．

b:　商品 1 単位が品切れしたときに課せられる品切れ費用．

p:　商品の価格．意思決定変数である．

D:　需要量：価格に依存する確定値を表す項 $y(p)$ とランダム項 ϵ の和：

$$D(p,\epsilon) = y(p) + \epsilon$$

$y(p)$ は線形需要価格関数：

$$y(p) = -a(p - P_0) + D_0$$

ランダム項 ϵ は，期待値 μ （通常は 0 を仮定）をもつ連続な確率変数であり，その分布関数 $F(x)$ は微分可能であり，密度関数を $f(x)$ とする．

8　価格を考慮した新聞売り子モデル(2)

仕入れ量が s のときの収益を表す確率変数：

$$\begin{cases} pD(p,\epsilon) - cs - h(s - D(p,\epsilon)) & D(p,\epsilon) \le s \\ ps - cs - b(D(p,\epsilon) - s) & D(p,\epsilon) > s \end{cases}$$

$z = s - y(p)$ **と置き換えたときの収益：**

$$R(z,p) = \begin{cases} p(y(p)+\epsilon) - c(y(p)+z) - h(z-\epsilon) & \epsilon \le z \\ p(y(p)+z) - c(y(p)+z) - b(\epsilon - z) & \epsilon > z \end{cases}$$

収益の期待値：

$$\mathsf{E}[R(z,p)] = \int_{-\infty}^{z} \{p(y(p)+x) - h(z-x)\} f(x)dx$$
$$+ \int_{z}^{\infty} \{p(y(p)+z) - b(x-z)\} f(x)dx - c(y(p)+z)$$

9　価格を考慮した新聞売り子モデル(3)

確率変数を含まない項と含む項（リスク項）に分解：

$$\mathsf{E}[R(z,p)] = (p-c)(y(p)+\mu) - \left\{(c+h)\int_{-\infty}^{z}(z-x)f(x)dx + (p+b-c)\int_{z}^{\infty}(x-z)f(x)dx\right\}$$

リスク（第 2）項を最適にする z（新聞売り子問題）：

$$F(z) = \frac{p+b-c}{h+p+b}$$

変数 p による一階偏微分：

$$\frac{\partial \mathsf{E}[R(z,p)]}{\partial p} = 2a\left(\frac{aP_0+D_0+ac}{2a} - p\right) + \int_{z}^{\infty}(x-z)f(x)dx$$

リスクがないときの最適価格：

$$\hat{p} = \frac{aP_0+D_0+ac}{2a}$$

最適な価格 p^*：

$$p^* = \hat{p} - \frac{\int_z^{\infty}(x-z)f(x)dx}{2a}$$

10　価格を考慮した動的ロットサイズ決定モデル

T:　計画期間数；期を表す添え字を $1, 2, \cdots, t, \cdots, T$ と記す．

f_t:　期 t において生産を行うために必要な段取り（固定）費用

c_t:　期 t における品目 1 個あたりの生産変動費用

h_t:　期 t における（品目 1 個あたり，1 期間あたりの）在庫費用

M_t:　期 t における生産可能量の上限．これを生産の容量とよぶこともある．

I_t:　期 t における在庫量．より正確に言うと，期 t の期末の在庫量．

x_t:　期 t における生産量

y_t:　期 t に生産を行うとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

P_t:　期 t における品目の価格．ここでは，価格は任意の非負の実数値をとることができ，毎期，価格を変更しても良いものと仮定する．

$D_t(P_t)$:　期 t における品目の需要量．これは，期 t の価格 P_t に対する任意の関数であるとする．

11 定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \sum_{t=1}^{T} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t - D_t(P_t) P_t) & & \\
\text{subject to} \qquad I_{t-1} + x_t - I_t = D_t(P_t) & \qquad & \forall t = 1, \cdots, T \\
x_t \le M_t y_t & & \forall t = 1, \cdots, T \\
I_0 = 0 & & \\
P_t, x_t, I_t \ge 0 & & \forall t = 1, \cdots, T \\
y_t \in \{0, 1\} & & \forall t = 1, \cdots, T
\end{aligned}
$$

12　動的計画

ネットワーク：期を表す点 $1, 2, \cdots, T$ **とダミーの始点** 0**，点** i **から点** $j\ (> i)$ **に枝．枝** (i, j) **の距離** C_{ij} **を，期** $i+1$ **に生産を行い，期** $i+1$ **から期** j **までの需要をまかなうときの費用から収益を減じたもの．**

$\Rightarrow$ **点** 0 **から点** T **までの最短路が最適解に対応**

距離 C_{ij} **：**

$$C_{ij} = f_{i+1} + c_{i+1}\left(\sum_{t=i+1}^{j} D_t(P_t)\right) + \sum_{s=i+1}^{j-1} h_s \sum_{t=s+1}^{j} D_t(P_t) - \sum_{t=i+1}^{j} D_t(P_t)P_t$$

期 j **の価格を決める問題** $\Rightarrow$ **期ごとに独立** $\Rightarrow$ **最小化：**

$$\left(c_{i+1} + \sum_{s=i+1}^{j-1} h_s\right) D_t(P_t) - D_j(P_j)P_j$$

上式の最小値を Δ_j**．**C_{ij} **を計算するための再帰式：**

$$C_{ii} = f_{i+1}$$

$$C_{ij} = C_{i,j-1} + \Delta_j$$