

# 1 動的価格づけモデル：輸送の例題

---

動的価格づけ (dynamic pricing): 価格を変えることによって需要を変化

A地点とB地点の往復輸送 (30 万円)

現在の価格は 1 トンあたり 3 万円に固定

AからBの輸送量 8 トン

BからAの輸送量 1 トン

現状: 8 トントラックで往復  $3 \times 8 + 3 \times 1 - 30 = 3$  万円の赤字

価格を変数として, 需要と価格の関係が線形になっていると仮定

AからBの輸送量  $D_1$  は価格  $P_1$  の関数として,  $D_1 = 11 - P_1$

BからAの輸送量  $D_2$  は価格  $P_2$  の関数として,  $D_2 = 4 - P_2$

$D_1 \times P_1$  ならびに  $D_2 \times P_2$  の最大化

$\Rightarrow P_1 = 5.5$  万,  $P_2 = 2$  万が最大収益

輸送量は  $D_1 = 5.5$  トン,  $D_2 = 2$  トン

利益は,  $5.5 \times 5.5 + 2 \times 2 - 30 = 4.25$  万円

5 トントラックでA, Bの地点の往復すると 20 万円

AからBへの輸送量を上限の 5 トン  $\Rightarrow$  価格  $P_1$  を 6 万円に設定

BからAへの輸送量は, 最大利益をもたらすよう  $P_2 = 2$  万円と設定

利益は,  $5 \times 6 + 2 \times 2 - 20 = 14$  万円

## 2 線形関数の場合

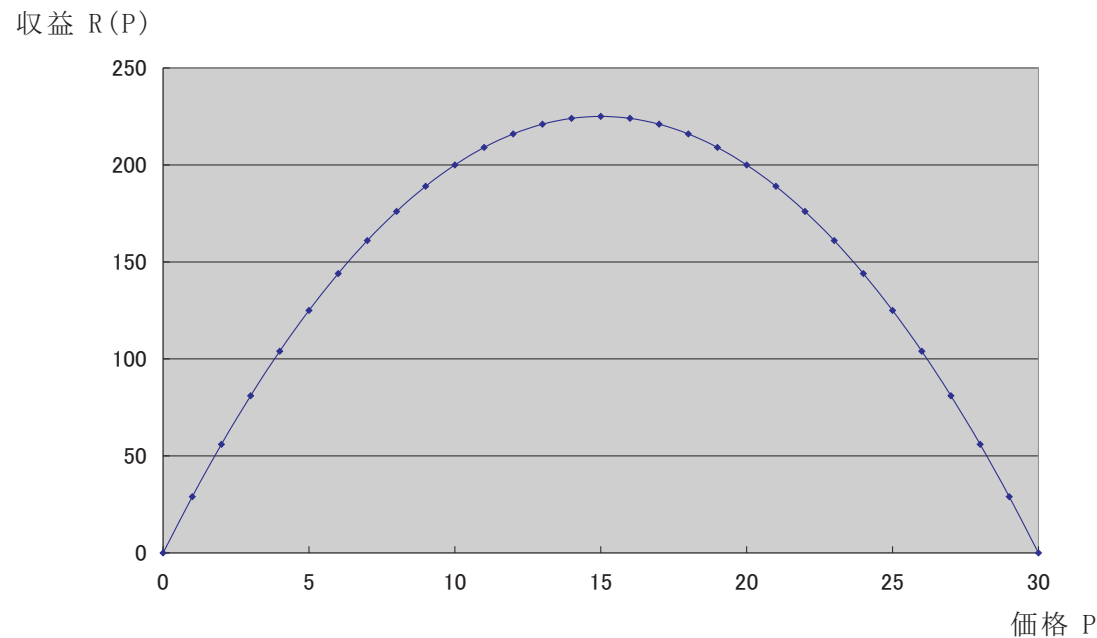
価格が  $P_0 (> 0)$  のときの製品の需要量  $D_0 (> 0)$

需要量の価格敏感度を表すパラメータを  $a (> 0)$

$$D(P) = -a(P - P_0) + D_0$$

収益  $R(P)$

$$R(P) = D(P)P = P(-aP + aP_0 + D_0)$$



### 3 指数関数の場合

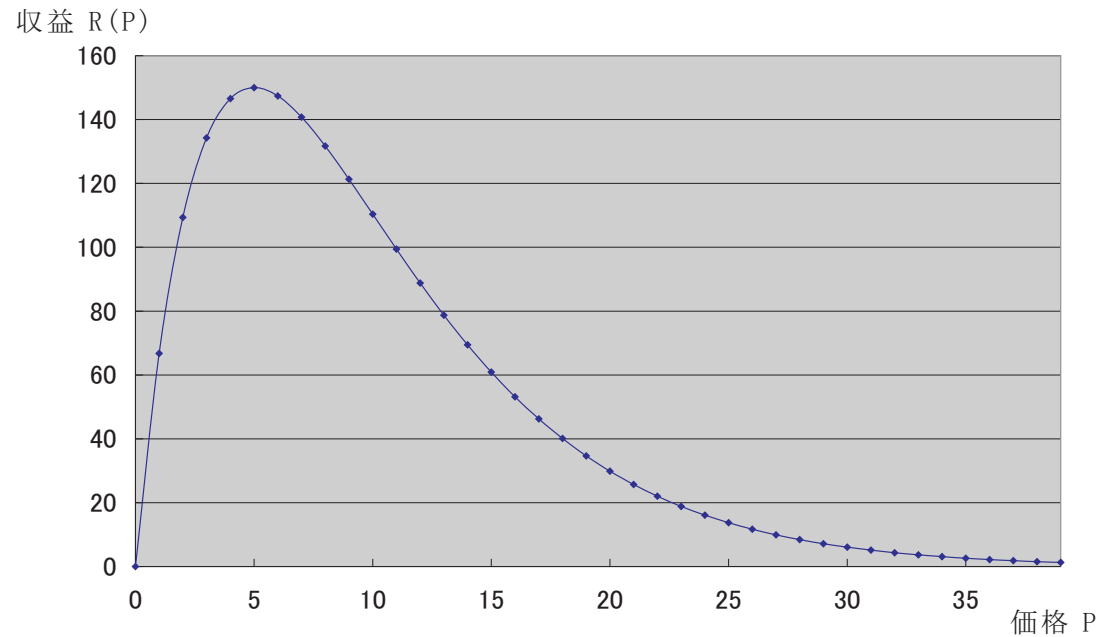
---

需要量の価格敏感度を表すパラメータを  $a (> 0)$

$$D(P) = D_0 \exp^{-a(P/P_0-1)}$$

収益  $R(P)$

$$R(P) = D_0 \exp^{-a(P/P_0-1)} P$$



## 4 価格が特定の離散値をとる場合

---

離散値の場合には，消費者の心理まで取り込んだ詳細な価格と需要量の関係を表現  
例：1000円を980円にすると売れるが，1020円を1000円にして売れない．

取り得る価格  $P_1 < P_2 < \dots < P_K$

対応する需要量  $D_1 > D_2 > \dots > D_K$

対応する収益を  $R_k = P_k D_k$  ( $k = 1, \dots, K$ )

## 5 効用関数によって需要が定まる場合

---

消費者選択 ( consumer choice ) 理論におけるランダム選択

ある顧客 ( 消費者 ) が複数の商品  $1, \dots, n$  から 1 つの商品を選択

商品  $j$  に対する固定的な効用  $u_j$  ( 価格をこれに含める )

ランダムな効用  $\epsilon_j$

商品  $j$  に対する効用  $U_j$  :

$$U_j = u_j + \epsilon_j$$

顧客が商品  $j$  を選択する確率 :

$$\Pr(U_j = \max_{i=1, \dots, n} U_i)$$

ロジットモデル ( logit model ) :  $\epsilon_j$  が独立かつ同一の二重指数 ( Gumbel ) 分布 :

$$\Pr(\epsilon_j \leq x) = \exp^{-\exp^{-\left(\frac{x}{\mu} + \gamma\right)}}$$

$\gamma$  は Euler 定数 (  $\approx 0.5772\dots$  ),  $\mu$  は ( スカラー ) パラメータ

商品  $j$  (  $\in S$  ) が選択される確率 :

$$\Pr(j) = \frac{\exp \frac{u_j}{\mu}}{\sum_{j=1}^n \exp \frac{u_j}{\mu}}$$

## 6 価格を考慮した経済発注量モデル

---

品目は一定のスピードで消費

需要量  $D(P)$  : 品目の価格  $P$  に対する関数

品目の品切れは許されず, 発注リード時間は 0 である.

発注の固定費用は  $K$  円

品目 1 個あたりの保管費用は 1 日で  $h$  円

単位時間 (1 日) あたりの費用:

$$\frac{KD(P)}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

最適発注量  $Q^*$  :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD(P)}{h}}$$

最適費用:

$$\sqrt{2KhD(P)}$$

収益 - 費用 (最小化):

$$D(P)P - \sqrt{2KhD(P)}$$

線形需要価格関数の場合には, 上式を最小にする問題は, 3 次方程式の根を求める問題

## 7 価格を考慮した新聞売り子モデル(1)

---

$h$ : 商品 1 単位が売れ残ったときに課せられる在庫費用 .

$c$ : 商品 1 単位の仕入れ (購入) 費用 .

$b$ : 商品 1 単位が品切れしたときに課せられる品切れ費用 .

$p$ : 商品の価格 . 意思決定変数である .

$D$ : 需要量 : 価格に依存する確定値を表す項  $y(p)$  とランダム項  $\epsilon$  の和 :

$$D(p, \epsilon) = y(p) + \epsilon$$

$y(p)$  は線形需要価格関数 :

$$y(p) = -a(p - P_0) + D_0$$

ランダム項  $\epsilon$  は , 期待値  $\mu$  (通常は 0 を仮定) をもつ連続な確率変数であり , その分布関数  $F(x)$  は微分可能であり , 密度関数を  $f(x)$  とする .

## 8 価格を考慮した新聞売り子モデル(2)

---

仕入れ量が  $s$  のときの収益を表す確率変数：

$$\begin{cases} pD(p, \epsilon) - cs - h(s - D(p, \epsilon)) & D(p, \epsilon) \leq s \\ ps - cs - b(D(p, \epsilon) - s) & D(p, \epsilon) > s \end{cases}$$

$z = s - y(p)$  と置き換えたときの収益：

$$R(z, p) = \begin{cases} p(y(p) + \epsilon) - c(y(p) + z) - h(z - \epsilon) & \epsilon \leq z \\ p(y(p) + z) - c(y(p) + z) - b(\epsilon - z) & \epsilon > z \end{cases}$$

収益の期待値：

$$\begin{aligned} E[R(z, p)] &= \int_{-\infty}^z \{p(y(p) + x) - h(z - x)\} f(x) dx \\ &+ \int_z^{\infty} \{p(y(p) + z) - b(x - z)\} f(x) dx - c(y(p) + z) \end{aligned}$$



## 9 価格を考慮した新聞売り子モデル(3)

---

確率変数を含まない項と含む項（リスク項）に分解：

$$E[R(z, p)] = (p - c)(y(p) + \mu) - \left\{ (c + h) \int_{-\infty}^z (z - x)f(x)dx + (p + b - c) \int_z^{\infty} (x - z)f(x)dx \right\}$$

リスク（第2）項を最適にする  $z$ （新聞売り子問題）：

$$F(z) = \frac{p + b - c}{h + p + b}$$

変数  $p$  による一階偏微分：

$$\frac{\partial E[R(z, p)]}{\partial p} = 2a \left( \frac{aP_0 + D_0 + ac}{2a} - p \right) + \int_z^{\infty} (x - z)f(x)dx$$

リスクがないときの最適価格：

$$\hat{p} = \frac{aP_0 + D_0 + ac}{2a}$$

最適な価格  $p^*$ ：

$$p^* = \hat{p} - \frac{\int_z^{\infty} (x - z)f(x)dx}{2a}$$

## 10 価格を考慮した動的ロットサイズ決定モデル

---

$T$ : 計画期間数；期を表す添え字を  $1, 2, \dots, t, \dots, T$  と記す．

$f_t$ : 期  $t$  において生産を行うために必要な段取り（固定）費用

$c_t$ : 期  $t$  における品目 1 個あたりの生産変動費用

$h_t$ : 期  $t$  における（品目 1 個あたり，1 期間あたりの）在庫費用

$M_t$ : 期  $t$  における生産可能量の上限．これを生産の容量とよぶこともある．

$I_t$ : 期  $t$  における在庫量．より正確に言うと，期  $t$  の期末の在庫量．

$x_t$ : 期  $t$  における生産量

$y_t$ : 期  $t$  に生産を行うとき 1，それ以外るとき 0 を表す 0-1 変数

$P_t$ : 期  $t$  における品目の価格．ここでは，価格は任意の非負の実数値をとることができ，  
每期，価格を変更しても良いものと仮定する．

$D_t(P_t)$ : 期  $t$  における品目の需要量．これは，期  $t$  の価格  $P_t$  に対する任意の関数であるとする．

# 11 定式化

---

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sum_{t=1}^T (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t - D_t(P_t) P_t) \\ & \text{subject to } \quad I_{t-1} + x_t - I_t = D_t(P_t) \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & \quad \quad \quad x_t \leq M_t y_t \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & \quad \quad \quad I_0 = 0 \\ & \quad \quad \quad P_t, x_t, I_t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & \quad \quad \quad y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

## 12 動的計画

ネットワーク：期を表す点  $1, 2, \dots, T$  とダミーの始点  $0$ ，点  $i$  から点  $j$  ( $> i$ ) に枝．枝  $(i, j)$  の距離  $C_{ij}$  を，期  $i+1$  に生産を行い，期  $i+1$  から期  $j$  までの需要をまかなうときの費用から収益を減じたもの．

⇒ 点  $0$  から点  $T$  までの最短路が最適解に対応

距離  $C_{ij}$ ：

$$C_{ij} = f_{i+1} + c_{i+1} \left( \sum_{t=i+1}^j D_t(P_t) \right) + \sum_{s=i+1}^{j-1} h_s \sum_{t=s+1}^j D_t(P_t) - \sum_{t=i+1}^j D_t(P_t) P_t$$

期  $j$  の価格を決める問題 ⇒ 期ごとに独立 ⇒ 最小化：

$$\left( c_{i+1} + \sum_{s=i+1}^{j-1} h_s \right) D_t(P_t) - D_j(P_j) P_j$$

上式の最小値を  $\Delta_j \cdot C_{ij}$  を計算するための再帰式：

$$C_{ii} = f_{i+1}$$

$$C_{ij} = C_{i,j-1} + \Delta_j$$