1　施設配置問題

施設配置問題（facility location problem），**工場立地問題**（plant location problem）

空間内において最適な点を選択する問題の総称

応用例

工場，倉庫，配送センター，学校，油田，病院，郵便局，郵便ポストなどの種々の施設の立地

タイプのキー配置の決定や工場内の機械の配置

メディアン問題（median problem）

顧客から最も近い施設への距離の「合計」を最小にするようにグラフ内の点または枝上，または空間内の任意の点から施設を選択する問題．

センター問題（center problem）

顧客から最も近い施設への距離の「最大値」を最小にするようにグラフ内の点または枝上，または空間内の任意の点から施設を選択する問題．

容量制約なし（単純）施設配置問題（uncapacitated（simple）facility location problem）
顧客は需要を持っており，その値は既知であるとする．顧客と施設の間に 1 単位の需要が移動するときにかかる輸送費用と，施設を開設するときにかかる固定費用が与えられているとき，全ての顧客の需要を満たすという条件の下で，輸送費用と固定費用の和を最小にするように，1 つないし複数の施設を選択する問題．

2　モデルの分類 (1)

1. 施設の配置可能地点
   (a) 連続型
   (b) 離散型
2. 選択可能な施設数
   (a) 単一
   (b) 複数
      i. 施設の数が固定
      ii. 施設の数が任意
3. 目的関数
   (a) 最も近い施設への距離（ユークリッド距離，マンハッタン距離など）の関数
   (b) 道路ネットワーク上での距離，時間，または距離・時間の関数
   (c) 輸送費用
4. ネットワークの種類
   (a) 一般型 (有向，無向)
   (b) 木状
   (c) その他の特殊なネットワーク （たとえばリング型ネットワーク，平面的グラフなど）

3　モデルの分類 (2)

5. 評価尺度の基準
   (a) min-sum 基準：最も近い施設への距離の合計を最小化
   (b) min-max 基準：最も近い施設への距離の最も遠い顧客に対する距離を最小化
   (c) max-sum 基準：最も近い施設への距離の合計を最大化（迷惑施設（obnoxious facility）の立地）
   (d) max-min 基準：施設に最も近い顧客への距離を最大化（核廃棄物最終保管場所やウィルス実験所など）
   (e) 上の基準の混合型
6. 施設の必須性
   (a) 必ず必要 (essential)
   (b) 必ずしも必要でない (nonessential)
7. 顧客需要の分割の有無
   (a) 分割可能 (preemptive, proportional)
   (b) 分割不可 (nonpreemptive, binary)

4　モデルの分類 (3)

8. 顧客需要に関する情報
   (a) 確定値が既知
   (b) 確率分布が既知
   (c) 何の情報も持たない
9. 移動費用(距離，時間)に関する情報
   (a) 確定値が既知
   (b) 確率分布が既知
   (c) 何の情報も持たない
0. 需要の変動
   (a) 定常 (静的: static)
   (b) 時間によって変化するが，時間を複数の期に分けたとき，期ごとでは定常(多期間: multiperiod)
   (c) 時間によって変化し，将来の需要値は分からない (動的: dynamic)
1. 他の施設との競争の有無
   (a) 競争あり
   (b) 競争なし
      i. 協力してサービスをする
      ii. 独立にサービスする

5　モデルの分類 (4)

2. 施設の容量制約
   (a) 制約なし
   (b) 制約あり
      i. 下限制約
      ii. 上限制約
3. 待ち行列的要素
   (a) なし
   (b) あり
   この場合には，待ち行列に対する膨大な分類基準が必要になる：
4. サービス順
   (a) 先着順 (FIFO: first-in first-out)
   (b) 後着順 (LIFO: last-in first-out)
   (c) 待ち時間に応じた評価尺度
5. 施設間の相互作用
   (a) 相互作用なし
   (b) 相互作用あり
   例：2次割当問題 (quadratic assignment problem)

6 Weber問題とその解法

各顧客 $i \in I$ は平面上に分布；座標を (X_i, Y_i)
顧客は需要量 w_i．目的関数は施設と顧客の間の距離に需要量を乗じたものの和
顧客と施設間の距離は ℓ_p ノルム（$1 \leq p$）

$$f(X,Y) = \sum_{i \in I} w_i \left\{(X - X_i)^p + (Y - Y_i)^p\right\}^{1/p} \tag{1}$$

を最小にする $(X,Y) \in \mathrm{R}^2$ を求める問題

式(1)は凸関数

$$\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = \sum_{i \in I} w_i (X - X_i) \frac{|X - X_i|^{p-2}}{\{(X - X_i)^p + (Y - Y_i)^p\}^{(p-1)/p}} = 0$$

$$X^{(q+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i \in I} w_i |X^{(q)} - X_i|^{p-2} X_i / \left\{(X^{(q)} - X_i)^p + (Y^{(q)} - Y_i)^p\right\}^{(p-1)/p}}{\displaystyle\sum_{i \in I} w_i |X^{(q)} - X_i|^{p-2} / \left\{(X^{(q)} - X_i)^p + (Y^{(q)} - Y_i)^p\right\}^{(p-1)/p}}$$

$\Rightarrow$ 不動点アルゴリズム（$1 \leq p \leq 2$ のとき大域的最適解に収束）

7　単純施設配置問題の定式化

需要地点（または顧客）の集合を I，施設の配置可能地点の集合を J

顧客の需要量は合計値が 1 になるようにスケーリング

顧客 $i \in I$ と施設 $j \in J$ 間に 1 単位の需要が移動するときにかかる輸送費用を c_{ij}，施設 $j \in J$ を開設するときにかかる固定費用を f_j

$$x_{ij} = \text{顧客 } i \text{ の需要が施設 } j \text{ によって満たされる割合}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{施設 } j \text{ を開設するとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 & \forall i \in I \\ & x_{ij} \leq y_j & \forall i \in I, j \in J \\ & x_{ij} \geq 0 & \forall i \in I, j \in J \\ & y_j \in \{0, 1\} & \forall j \in J \end{array}$$

8　Lagrange緩和 (1)

$$1 - \sum_{j \in J} x_{ij} \ (= 0)$$

に実数u_iを乗じて目的関数に加える：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} - u_i) x_{ij} + \sum_{i \in I} u_i \\ \text{subject to} & \qquad\qquad\qquad \textbf{残りの制約} \end{array}$$

各施設 $j \in J$ ごとに分解された問題：

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle f_j y_j + \sum_{i \in I} (c_{ij} - u_i) x_{ij} & \\ \text{subject to} & x_{ij} \leq y_j & \forall i \in I \\ & x_{ij} \geq 0 & \forall i \in I \\ & y_j \in \{0, 1\} & \end{array}$$

9　Lagrange緩和 (2)

$y_j = 1$ **のとき：**

$$f_j + \sum_{i \in I} (c_{ij} - u_i)^-$$

y_j **は** $f_j + \sum_{i \in I} (c_{ij} - u_i)^-$ **が正ならば** 0**，負ならば** 1

$$x_{ij} = \begin{cases} y_j & c_{ij} - u_i < 0 \text{ のとき} \\ 0 \text{ または } y_j & c_{ij} - u_i = 0 \text{ のとき} \\ 0 & c_{ij} - u_i > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

Lagrange双対問題（Lagrangean dual problem**）：**

$$LB = \max_u L(u)$$

微分不可能関数の最適化 $\Rightarrow$ **劣勾配法などの手法で求解**

10 双対上昇法 (1)

（線形計画緩和の）双対問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{i \in I} u_i - \sum_{j \in J} w_j \\ \text{subject to} \quad & u_i - v_{ij} \le c_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J \\ & \sum_{i \in I} v_{ij} - w_j \le f_j \forall j \in J \\ & v_{ij} \ge 0 \qquad \forall i \in I, j \in J \\ & w_j \ge 0 \qquad \forall j \in J \end{aligned}$$

$$w_j \ge \sum_{i \in I} v_{ij} - f_j \quad \forall j \in J$$

$w_j\ (\ge 0)$ **は小さい方が良い：**

$$w_j = \left(\sum_{i \in I} v_{ij} - f_j \right)^+$$

11　双対上昇法 (2)

$$v_{ij} \geq u_i - c_{ij}$$

v_{ij} はなるべく小さい方が良い：

$$v_{ij} = (u_i - c_{ij})^+$$

u だけを用いたコンパクトな表現：

$$\max_u \left\{ \sum_{i \in I} u_i - \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} (u_i - c_{ij})^+ - f_j \right)^+ \right\}$$

下界上昇法
初期解：$u_i = \min_{j \in J} c_{ij}, \forall i \in I$
反復：各 $i \in I$ ごとに次に大きい c_{ij} に u_i が一致するか $\sum_{i \in I} (u_i - c_{ij})^+ - f_j = 0$ が満たされるまで u_i を増やす

上界：
$\sum_{i \in I} (u_i - c_{ij})^+ - f_j = 0$ を満たす $j \in J$ に施設設置

12　Bendersの分解法 (1)

整数変数 y を固定した問題 $\Rightarrow$ 顧客ごとに分解

各 $i \in I$ に対して：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \\
& x_{ij} \le y_j \quad \forall j \in J \\
& x_{ij} \ge 0 \quad \forall j \in J
\end{aligned}
$$

最適値を y の関数として $Z_i(y)$：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} Z_i(y) \\
\text{subject to} \quad & y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J
\end{aligned}
$$

13　Bendersの分解法 (2)

双対問題：すべての $i \in I$ に対して：

$$
\begin{aligned}
Z_i(y) = \ & \text{maximize } u_i - \sum_{j \in J} v_{ij} y_j \\
& \text{subject to } u_i - v_{ij} \le c_{ij} \forall j \in J \\
& \qquad\qquad\qquad v_{ij} \ge 0 \quad \forall j \in J
\end{aligned}
$$

$$v_{ij} = (u_i - c_{ij})^+$$

v_{ij} **を消去：**

$$Z_i(y) = \max_{u_i} \left\{ u_i - \sum_{j \in J} (u_i - c_{ij})^+ y_j \right\}$$

区分的線形関数 $\Rightarrow$ **継ぎ目だけ考えれば良い：**

$$Z_i(y) = \max_{k \in J} \left\{ c_{ik} - \sum_{j \in J} (c_{ik} - c_{ij})^+ y_j \right\}$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \xi_i \\
\text{subject to } \xi_i \geq c_{ik} - & \sum_{j \in J} (c_{ik} - c_{ij})^{+} y_j \forall k \in J, i \in I \\
& y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式(2)**から必要なものを選択し，順次追加していく切除平面法（**Benders**の切除平面）**