1　単一段階・単一品目モデル

- 期によって変動する需要量をもつ単一の品目
- 品目を生産する際には，生産数量に依存しない固定費用と数量に比例する変動費用．
- 計画期間はあらかじめ決められており，最初の期における在庫量（初期在庫量）は 0
- 次の期に持ち越した品目の量に比例して在庫（保管）費用
- 生産時間は 0
- 各期の生産可能量には上限
- 生産固定費用，生産変動費用，ならびに在庫費用の合計を最小

T:　計画期間数
f_t:　期 t において生産を行うために必要な段取り（固定）費用
c_t:　期 t における品目 1 個あたりの生産変動費用
h_t:　期 t における在庫費用
d_t:　期 t における品目の需要量
M_t:　期 t における生産可能量の上限．

I_t:　期 t における在庫量
x_t:　期 t における生産量
y_t:　期 t に生産を行うとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

2 定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \sum_{t=1}^{T} & (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) \\
\text{subject to} \quad & I_{t-1} + x_t - I_t = d_t \quad && \forall t = 1, \cdots, T \\
& x_t \leq M_t y_t && \forall t = 1, \cdots, T \\
& I_0 = 0 \\
& x_t, I_t \geq 0 && \forall t = 1, \cdots, T \\
& y_t \in \{0, 1\} && \forall t = 1, \cdots, T
\end{aligned}
$$

3　(S, ℓ) 不等式

$D_{t\ell}$ $(= \sum_{i=t}^{\ell} d_i)$: 期 t から期 ℓ までの需要量の合計
期集合の部分集合 $L = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ とその部分集合 $S \subseteq L$

$$\sum_{t \in S} x_t \leq \sum_{t \in S} D_{t\ell} y_t + I_\ell$$

は妥当不等式
同値な式

$$\sum_{t \in L \setminus S} x_t + \sum_{t \in S} D_{t\ell} y_t \geq D_{1\ell}$$

4　(S,ℓ) 不等式の特殊形

$S=\{t\}$ かつ $\ell=t$ の場合
各期 $t\in\{1,2,\cdots,T\}$ に対して，

$$x_t\le d_t y_t + I_t$$

は妥当不等式

期 t に生産をしない（すなわち $y_t=0$）ならば，在庫量は非負 $I_t\ge 0$
期 t に生産をする（すなわち $y_t=1$）ならば，期 t 末の在庫量 I_t は生産量 x_t から需要量 d_t を減じた値以上

5　分離問題の解法

固定された ℓ に対して $L = \{1, \cdots, \ell\}$
その各要素 $t\ (\in L)$ のうち $D_{t\ell} y_t^* < x_t^*$ を満たすものの集合を S

$$\sum_{t \in L \setminus S} x_t^* + \sum_{t \in S} D_{t\ell} y_t^* < D_{1\ell}$$

が成立
$\Rightarrow$ 緩和解 (x^*, y^*, I^*) を切る (S, ℓ) 不等式：

$$\sum_{t \in L \setminus S} x_t + \sum_{t \in S} D_{t\ell} y_t \geq D_{1\ell}$$

6　動的計画法

容量制約なしの単一段階・単一品目のロットサイズ決定モデル

$1,\cdots,j$ **期までの需要を満たすときの最小費用を** $F(j)$

初期（境界）条件（仮想の期 0**）**

$$F(0)=0$$

再帰方程式：

$$F(j)=\min_{i\in\{0,\cdots,j-1\}}\left\{F(i)+f_{i+1}+c_{i+1}\left(\sum_{t=i+1}^{j}d_t\right)+\sum_{s=i+1}^{j-1}h_s\sum_{t=s+1}^{j}d_t\right\}$$

上の再帰方程式を $j=1,2,\cdots,T$ **の順に計算**

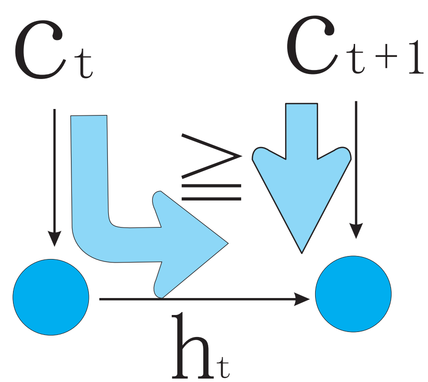
最適費用 $F(T)$

$O(T^2)$ **のアルゴリズム（**$O(T\log T)$ **に改善可能）**

7　強い定式化のためのモデルの分類

費用関数の性質による分類:　在庫費用 h_t と期 t，期 $t+1$ の生産変動費用 c_t, c_{t+1} の間に以下の関係が常に成立するときに，費用関数はWagner-Whitin（WW）型であるとよぶ：

$$h_t + c_t \geq c_{t+1} \quad \forall t = 1, \cdots, T$$



容量制約なし:　最短路定式化，施設配置定式化

フル容量生産:　期 t における生産量 x_t が，常に生産量上限 M_t と等しくなるように生産；実数変数 x_t, I_t を定式化から消去した強い定式化

8　WW型の費用関数 (1)

$D_{t\ell}$:　**期** t **から期** ℓ **までの需要量の合計** $\sum_{i=t}^{\ell} d_i$ **.**
$\tilde{h}_t$:　**費用が**WW**型のときには，**$h_t + c_t - c_{t+1} \geq 0$ **なので，これを新たに在庫費用** $\tilde{h}_t$ **とする.**

$x_t = d_t + I_t - I_{t-1}$ **を目的関数に代入：**

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t + \sum_{t=1}^{T} h_t I_t &= \sum_{t=1}^{T} c_t d_t + \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} (h_t + c_t - c_{t+1}) I_t \\ &= \sum_{t=1}^{T} c_t d_t + \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} \tilde{h}_t I_t \end{aligned}$$

(WW**型の仮定の下では) 在庫はなるべく少ない方が良い：**

$$I_{t-1} = \left[\max_{\ell = t, t+1, \cdots, T} \left(D_{t\ell} - \sum_{i=t}^{\ell} M_i y_i \right) \right]^+$$

9　WW型の費用関数 (2)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \left(f_t y_t + \tilde{h}_t I_t \right) \\
\text{subject to} \quad & I_{t-1} + \sum_{i=t}^{\ell} M_i y_i \ge D_{t\ell} \quad \forall t = 2, \cdots, T, \ell = t, \cdots, T \\
& I_0 = 0 \\
& I_t \ge 0 \qquad \forall t = 1, \cdots, T \\
& y_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t = 1, \cdots, T
\end{aligned} \tag{1}
$$

式(1)**の強化：**

$$
I_{t-1} + \sum_{i=t}^{\ell} \min\{M_i, D_{i\ell}\} y_i \ge D_{t\ell} \quad \forall t = 2, \cdots, T, \ell = t, \cdots, T
$$

$\Rightarrow$ **余裕変数つきの** 0-1 **ナップサック問題**

10 最短路定式化

動的計画アルゴリズム $\Rightarrow$ **最短路問題**

枝 (i,j) **がパスに含まれるとき** 1**，それ以外のとき** 0 **である変数** z_{ij}

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{ij} C_{ij} z_{ij} \\
\text{subject to} & \displaystyle -\sum_{j} z_{ji} + \sum_{j} z_{ij} = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0, T \\ -1 & i = T \end{cases} \\
& z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall ij
\end{array}
$$

最短路問題は整数性をもつ．（制約条件を表す係数行列が完全単模（totally unimodular**；小行列式が常に** $-1,0,1$ **のいずれかになること）**

変数の関係：

$$
\begin{aligned}
y_t &= \sum_{j=t}^{T} z_{t-1,j} \\
x_t &= \sum_{j=t}^{T} \left(\sum_{i=t}^{j} d_i \right) z_{t-1,j} \\
I_t &= \sum_{i=1}^{t} (x_i - d_i)
\end{aligned}
$$

10.1 施設配置定式化

最短路定式化：$O(T^2)$ **個の** 0-1 **変数**

$\Rightarrow$ **オリジナルと定式化と同じ** $O(T)$ **個の** 0-1 **変数を用いた施設配置定式化**

X_{st} **：期** t **の需要のうち，期** s $(s \le t)$ **で生産した量によってまかなわれた比率を表す変数**

$$CH_{st} = \left(c_s + \sum_{\ell=s}^{t-1} h_\ell \right) d_t$$

$$\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{st:s\le t} CH_{st} X_{st} + \sum_{t} f_t y_t & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{s=1}^{t} X_{st} = 1 & \forall t = 1, \cdots, T \\
& X_{st} \le y_s & \forall s = 1, \cdots, t, t = 1, \cdots, T \\
& X_{st} \ge 0 & \forall s = 1, \cdots, t, t = 1, \cdots, T \\
& y_t \in \{0, 1\} & \forall t = 1, \cdots, T
\end{array}$$

11　フル容量生産

$$I_t = \sum_{i=1}^{t} x_i - D_{1t} \ (\geq 0)$$

から，フル容量生産 $x_t = M_t y_t$ を用いて，I_t と x_t を消去：

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t + \sum_{t=1}^{T} h_t I_t &= \sum_{t=1}^{T} (f_t + c_t M_t)\, y_t + \sum_{t=1}^{T} h_t \left(\sum_{i=1}^{t} M_i y_i - D_{1t} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{T} \tilde{f}_t y_t - \sum_{i=1}^{t} h_t D_{1t}\end{aligned}$$

ここで，$\tilde{f}_t = f_t + c_t M_t + \left(\sum_{i=t}^{T} h_i \right) M_t$

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \tilde{f}_t y_t \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{t} M_i y_i \geq D_{1t} \forall t = 2, \cdots, T \\ & y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \cdots, T\end{aligned}$$

12　単一段階・多品目モデル

- 期によって変動する需要量をもつ複数の品目
- 生産数量に依存しない段取り替え（生産準備）に要する費用（段取り費用）と生産数量に比例する変動費用
- 各品目ごとに，1 単位の量を生産するための時間（生産時間）は，1 単位時間になるようにスケーリング
- 各期の生産時間には上限
- 次の期に持ち越した品目の量に比例して在庫（保管）費用

- 大バケット問題の場合には，各期における段取りが次の期には持ち越せない．（すなわち，次の期で同じ品目を生産する場合にも，再びその品目のための段取りを行う必要がある．）
- 小バケット問題の場合には，各期における段取り状態が次の期に持ち越される．
  各期に生産可能な品目数は，1 種類（もしくは 2 種類以下）

13　大バケット（記号）

P:　品目の集合

T:　計画期間数；期を表す添え字を $1, 2, \cdots, t, \cdots, T$ と記す．

f_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替え（生産準備）を行うときの費用（段取り費用）
g_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替え（生産準備）を行うときの時間（段取り時間）
c_t^p:　期 t における品目 p の生産変動費用
h_t^p:　期 t から期 $t+1$ に品目 p を持ち越すときの単位あたりの在庫費用
d_t^p:　期 t における品目 p の需要量
M_t:　期 t における生産時間の上限

I_t^p:　期 t における品目 p の在庫量
x_t^p:　期 t における品目 p の生産量（仮定よりこれは生産時間と一致する．）
y_t^p:　期 t に品目 p に対する段取りを行うとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

14　大バケット（定式化）

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} \displaystyle\sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} \left(f_t^p y_t^p + c_t^p x_t^p + h_t^p I_t^p \right) & & \\
\text{subject to} & I_{t-1}^p + x_t^p - I_t^p = d_t^p & \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& \displaystyle\sum_{p \in P} x_t^p + \sum_{p \in P} g_t^p y_t^p \leq M_t & \forall t = 1, \cdots, T \\
& x_t^p \leq (M_t - g_t^p) y_t^p & \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& I_0^p = 0 & \forall p \in P \\
& x_t^p, I_t^p \geq 0 & \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& y_t^p \in \{0, 1\} & \forall t = 1, \cdots, T
\end{array}
$$

15　小バケットに対する定式化（追加記号）

SC_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替えを開始するときの費用（段取り開始費用）

ST_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替えを開始するときの時間（段取り開始時間）

EC_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替えを終了するときの費用（段取り終了費用）

ET_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替えを終了するときの時間（段取り終了時間）

SUC_t^{pq}:　期 t に品目 p から品目 q への段取り替えを行うときの費用（順序依存段取り費用）

SUT_t^{pq}:　期 t に品目 p から品目 q への段取り替えを行うときの時間（順序依存段取り時間）

z_t^p:　期 t に品目 p に対する生産を開始するとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

w_t^p:　期 t に品目 p に対する生産を終了するとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

χ_t^{pq}:　期 t に品目 p から品目 q への段取り替えを行うとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

16　小バケットに対する定式化

段取り 1 **回以下：**

$$\sum_{p \in P} y_t^p \leq 1$$

段取り開始・終了：

$$z_t^p - w_{t-1}^p = y_t^p - y_{t-1}^p$$

順序依存の段取り替え：

$$\chi_t^{pq} \geq y_{t-1}^p + y_t^q - 1$$

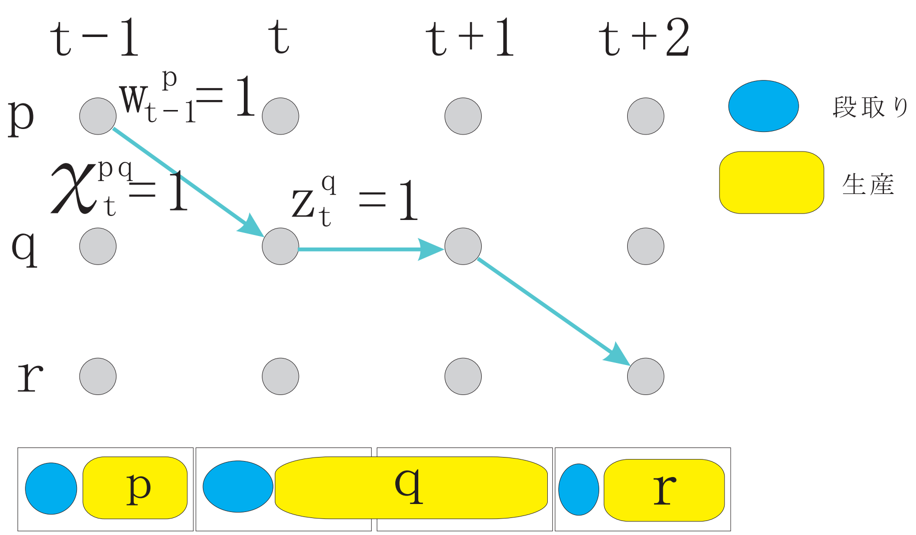
$$\sum_{p \in P} y_t^p = 1$$

17 強い定式化

$$\sum_{p \in P} \chi_t^{pq} = y_t^q$$

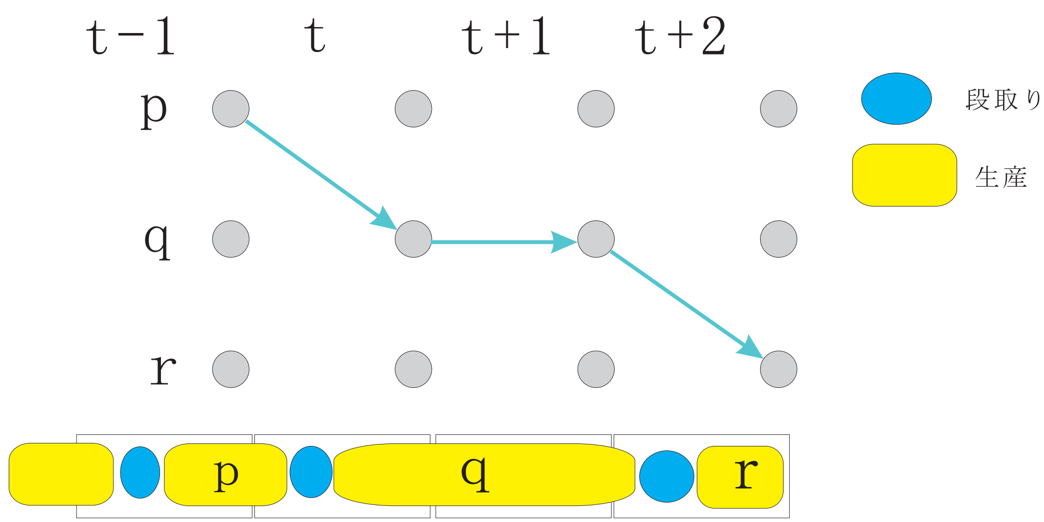
$$\sum_{q \in P} \chi_t^{pq} = y_{t-1}^p$$

$$\sum_{p \in P} y_0^p = 1$$



18　段取り回数の上限が 2 の場合

χ_t^{pq}:　期 t の途中で，品目 p から品目 q への段取り替えを（この順で）行うとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数



19　多段階モデルの記号 (1)

$\{1..T\}$:　期間の集合

P:　品目の集合

K:　生産を行うのに必要な資源（機械，生産ライン，工程などを表す）の集合

P_k :　資源 k で生産される品目の集合．

Parent_p:　部品展開表における品目（部品または材料）p の親品目の集合．言い換えれば，品目 p から製造される品目の集合．

f_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替え（生産準備）を行うときの費用（段取り費用）

g_t^p:　期 t に品目 p に対する段取り替え（生産準備）を行うときの時間（段取り時間）

c_t^p:　期 t における品目 p の生産変動費用

h_t^p:　期 t から期 $t+1$ に品目 p を持ち越すときの単位あたりの在庫費用

d_t^p:　期 t における品目 p の需要量

20　多段階モデルの記号 (2)

ϕ_{pq}:　$q \in \mathrm{Parent}_p$ のとき，品目 q を 1 単位製造するのに必要な品目 p の数
M_t^k:　期 t における資源 k の使用可能な生産時間の上限．
UB_t^p:　期 t における品目 p の生産時間の上限．

変数

x_t^p:　期 t における品目 p の生産量
I_t^p:　期 t における品目 p の在庫量
y_t^p:　期 t に品目 p に対する段取りを行うとき 1，それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数

21　多段階モデル（定式化）

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} & \left(f_t^p y_t^p + c_t^p x_t^p + h_t^p I_t^p \right) \\
\text{subject to} \quad & I_{t-1}^p + x_t^p = \\
& d_t^p + \sum_{q \in \text{Parent}_p} \phi_{pq} x_t^q + I_t^p \quad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& \sum_{p \in P_k} x_t^p + \sum_{p \in P_k} g_t^p y_t^p \le M_t^k \quad \forall k \in K, t = 1, \cdots, T \\
& x_t^p \le UB_t^p y_t^p \quad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& I_0^p = 0 \quad \forall p \in P \\
& x_t^p, I_t^p \ge 0 \quad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \cdots, T
\end{aligned}
$$

22　エシェロン在庫モデル（記号）

$\mathrm{Ancestor}_p$:　**品目 p の先祖の集合．親子関係を表す有向グラフを辿って到達可能な点に対応する品目から構成される集合．**

ρ_{pq}:　$q \in \mathrm{Ancestor}_p$ **のとき，品目 q を 1 単位生産するのに必要な製品 p の量**

H_t^p:　**期 t における品目 p のエシェロン在庫費用；品目 p を製造するのに必要な品目の集合を** Child_p

$$H_t^p = h_t^p - \sum_{q \in \mathrm{Child}_p} h_t^q \phi_{qp}$$

E_t^p:　**期 t における品目 p のエシェロン在庫量；自分と自分の先祖の品目の在庫量を合わせたもの：**

$$E_t^p = I_t^p + \sum_{q \in \mathrm{Ancestor}_p} \rho_{pq} I_t^q$$

23　エシェロン在庫を用いた定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} \left(f_t^p y_t^p + c_t^p x_t^p + H_t^p E_t^p \right) \\
\text{subject to} \quad & E_{t-1}^p + x_t^p - E_t^p = \\
& d_t^p + \sum_{q \in \mathsf{Ancestor}_p} \rho_{pq} d_t^q \qquad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& \sum_{p \in P_k} x_t^p + \sum_{p \in P_k} g_t^p y_t^p \leq M_t^k \qquad \forall k \in K, t = 1, \cdots, T \\
& E_t^p \geq \sum_{q \in \mathsf{Parent}_p} \phi_{pq} E_t^q \qquad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& x_t^p \leq UB_t^p y_t^p \qquad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& E_0^p = 0 \qquad \forall p \in P \\
& x_t^p, E_t^p \geq 0 \qquad \forall p \in P, t = 1, \cdots, T \\
& y_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t = 1, \cdots, T
\end{aligned}
$$

古典的ヒューリスティクス

期 i に生産を行うことによって期 i から j までの需要をまかなうときの費用を $C(i,j)$：

$$f_i + c_i \left(\sum_{t=i}^{j} d_t \right) + \sum_{s=i}^{j-1} h_s \sum_{t=s+1}^{j} d_t$$

Silver–Meal ヒューリスティクス

$t = 1$ **からはじめて，**1 **期に何期までの分をまとめて生産するかを，**

$$\frac{C(t,j)}{j-t} < \frac{C(t,j+1)}{j+1-t}$$

を満たす最小の $j\ (\geq t)$ 期までと決め，t を $j+1$ とする．ただし，上式を満たす j が存在しないときには，$j = T$ とする．この操作を $j = T$ となるまで繰り返す．

最小単位費用ヒューリスティクス（least unit cost heuristics**）：**

Silver–Meal **ヒューリスティクスのように単位期間あたりの最小費用とするのではなく，単位需要量あたりの最小費用とする．**

25　緩和固定法

緩和固定法（relax and fix method）

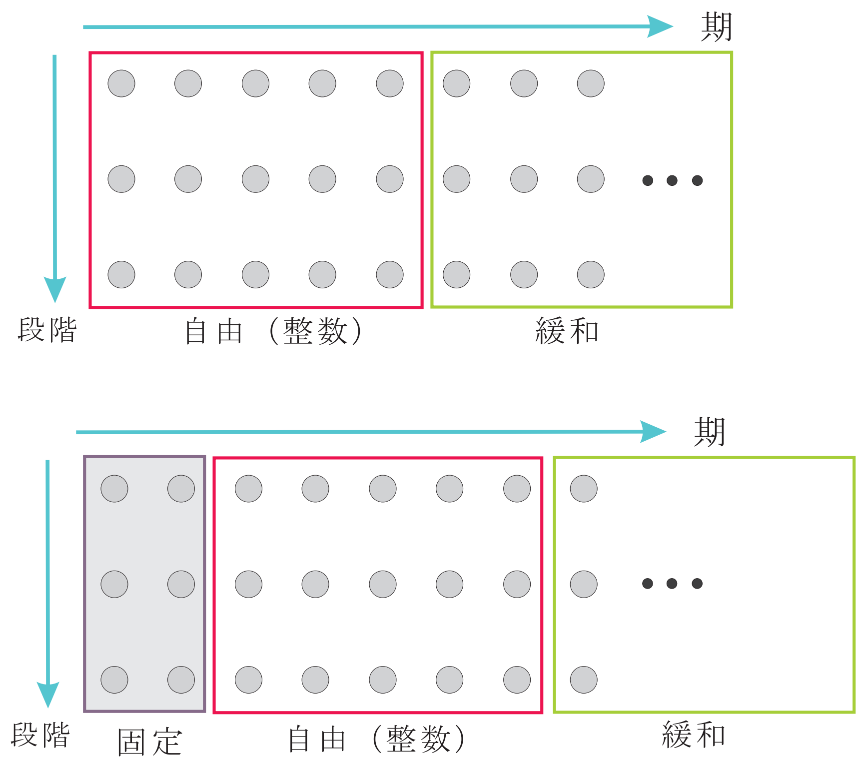


図1　緩和固定法の適用例（探索の広さは 5 期，探索の刻み幅は 2 期の場合）．上が最初の反復における変数の固定・緩和法で， 1 期から 5 期までを自由変数，6 期以降を連続緩和変数として最適化する．下が次の反復における変数の固定・緩和法で，上の問題を解いて得られた最適解の 1 期と 2 期の分は固定し，3 期から 7 期までを自由変数，8 期以降を連続緩和変数として最適化する．

26　容量スケーリング法

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & vx + Fy \\
\text{subject to} & x \le Cy \\
& Ax + By \le b \\
& x \in \mathrm{R}^n, y \in \{0,1\}^m
\end{array}
$$

容量スケーリング法

1. **平滑化パラメータ $\lambda \in (0,1]$ を決め，変化させる容量を表すパラメータ C' をオリジナルの容量 C に初期設定する．**
2. **以下を繰り返す．**
   (a) **0-1 変数 y を $[0, C/C']$ に緩和し，制約を $x \le C'y$ に変更した線形計画緩和問題を解く．**
   (b) **得られた線形計画緩和問題の解 $\bar{x}, \bar{y}$ においては，$\bar{x} = C'\bar{y}$ となっているので，新しい容量 C' を，平滑化パラメータ λ を用いて，現在の C' と $C'\bar{y}$ の間になるように**

$$C' := \lambda C'\bar{y} + (1-\lambda)C'$$

と変更する．

27　ローリング・ホライズン方式

本来の動的ロットサイズ決定モデルは無限期間

将来に関する情報がある有限期間以降では得られていない（と同時に有限期間までの情報は確定値である）と仮定し，有限の計画期間の問題に帰着させ，その有限期間の問題を繰り返し用いる

最終期以降の需要は定常であると仮定し，経済発注量モデルなどで平均発注間隔 TBO **(**Time Between Order **；経済発注量モデルにおけるサイクル時間）を計算**
期 t **における固定費用を** F_t **としたとき，**$T-t+1$ **が** 1 **以上の期に対して，固定費用を以下のように安く見積もる**

$$\frac{T-t+1}{TBO}F_t$$