1　数理計画とは

$$\begin{array}{ll} & \textbf{目的関数（通常は最小化か最大化のいずれかが選ばれる）} \\ \textbf{条件} & \textbf{制約式 } 1\textbf{，制約式 } 2\textbf{，}\cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \textbf{目的関数} \\ \text{subject to} & \textbf{制約式 } 1\textbf{，制約式 } 2\textbf{，}\cdots \end{array}$$

線形計画モデルの一例：

$$\begin{array}{lrrcr} \text{minimize} & 3x & +4y & & \\ \text{subject to} & 5x & +6y & \geq & 10 \\ & 7x & +5y & \geq & 5 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

AMPL（A Modeling Language for Mathematical Programming）
Fourer–Gay–Kernighan **によって開発された数理計画のためのモデリング言語**
300 **変数，** 300 **制約の制限つきのソルバーを同封した学生版** `www.ampl.com`

無償のソルバー GLPK**：**`www.gnu.org/software/glpk/glpk.html`

2　鶴亀算

鶴と亀が何匹かいる．頭の数の合計が 12，足の数の合計が 30．さて各々は何匹？

鶴が x 匹，亀が y 匹
頭の数は $x+y$，足の数は $2x+4y$

$$\begin{aligned} x+y &= 12 \\ 2x+4y &= 30 \end{aligned}$$

鶴が 9 匹，亀が 3 匹

3　鶴亀蛸算

鶴と亀と蛸の頭の数を足すと 32．足の数を足すと 80．亀と蛸の数の和を一番小さくする組を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & y+z \\
\text{subject to} \quad & x+y+z=32 \\
& 2x+4y+8z=80 \\
& x,y,z \geq 0
\end{aligned}
$$

線形計画ソルバーによる答え： $x=29.3333, y=0, z=2.66667$

整数計画（integer programming）：AMPLによるモデリング

```
var x >=0, integer;        # xは変数で，非負の整数であることの宣言
var y >=0, integer;
var z >=0, integer;
minimize cost: y+z;               # costという名前を付けた目的関数
subject to con1: x+y+z=32;        # con1という名前を付けた制約
subject to con2: 2*x+4*y+8*z=80;# con2という名前を付けた制約
```

整数計画ソルバーによる答え： $x=28, y=2, z=2$

4　主問題と双対問題 (1)

主問題

$$
\left|
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j\in N_1\cup N_2\cup N_3} c_j x_j & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j\in N_1\cup N_2\cup N_3} a_{ij} x_j \le b_i & \forall i \in M_1 \\
& \displaystyle\sum_{j\in N_1\cup N_2\cup N_3} a_{ij} x_j \ge b_i & \forall i \in M_2 \\
& \displaystyle\sum_{j\in N_1\cup N_2\cup N_3} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in M_3 \\
& x_j \ge 0 & \forall j \in N_1 \\
& x_j \le 0 & \forall j \in N_2 \\
& x_j \in \mathrm{R} & \forall j \in N_3
\end{array}
\right.
$$

実行可能解に対しては， $b_i - \sum_{j\in N_1\cup N_2\cup N_3} a_{ij} x_j$ **は，** $i \in M_1$ **に対しては** 0 **以上，** $i \in M_2$ **に対しては** 0 **以下，** $i \in M_3$ **に対しては** 0

5　主問題と双対問題 (2)

$i \in M_1$ に対して 0 以上の値をとる $y_i\ (\geq 0)$，$i \in M_2$ に対して 0 以下の値をとる $y_i\ (\leq 0)$，$i \in M_3$ に対して 任意の実数 y_i

$$\sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} \left(b_i - \sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} a_{ij} x_j \right) y_i \geq 0$$

$$\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} c_j x_j + \sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} \left(b_i - \sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} a_{ij} x_j \right) y_i & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i \in M_1 \\
& \displaystyle\sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} a_{ij} x_j \geq b_i & \forall i \in M_2 \\
& \displaystyle\sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in M_3 \\
& x_j \geq 0 & \forall j \in N_1 \\
& x_j \leq 0 & \forall j \in N_2 \\
& x_j \in \mathrm{R} & \forall j \in N_3
\end{array}$$

は上界

6　主問題と双対問題 (3)

Lagrange緩和問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j\in N_1\cup N_2\cup N_3}\left(c_j-\sum_{i\in M_1\cup M_2\cup M_3}a_{ij}y_i\right)x_j+\sum_{i\in M_1\cup M_2\cup M_3}b_iy_i \\
\text{subject to} & x_j\geq 0 \quad \forall j\in N_1 \\
 & x_j\leq 0 \quad \forall j\in N_2 \\
 & x_j\in \mathrm{R} \quad \forall j\in N_3
\end{array}
$$

∞ 以外の上界を与えるためのx_j の係数 $(c_j-\sum_{i\in M_1\cup M_2\cup M_3}a_{ij}y_i)$ （これを被約費用とよぶ）の条件

1. $j\in N_1$ **に対しては，**$x_j\geq 0$ **であるので** 0 **以下** $\Rightarrow c_j\leq\sum_{i\in M_1\cup M_2\cup M_3}a_{ij}y_i$
2. $j\in N_2$ **に対しては，**$x_j\leq 0$ **であるので** 0 **以上** $\Rightarrow c_j\geq\sum_{i\in M_1\cup M_2\cup M_3}a_{ij}y_i$
3. $j\in N_3$ **に対しては，**x_j **に制限がないのでちょうど** $0\Rightarrow c_j=\sum_{i\in M_1\cup M_2\cup M_3}a_{ij}y_i$

7　主問題と双対問題 (4)

双対問題

双対問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} b_i y_i & \\
\text{subject to} & y_i \geq 0 & \forall i \in M_1 \\
& y_i \leq 0 & \forall i \in M_2 \\
& y_i \in \mathsf{R} & \forall i \in M_3 \\
& \displaystyle\sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} a_{ij} y_i \geq c_j & \forall j \in N_1 \\
& \displaystyle\sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} a_{ij} y_i \leq c_j & \forall j \in N_2 \\
& \displaystyle\sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} a_{ij} y_i = c_j & \forall j \in N_3
\end{array}
$$

双対定理：（解をもつなら）主問題の最適値 $=$ 双対問題の最適値

8　主問題と双対問題 (5)

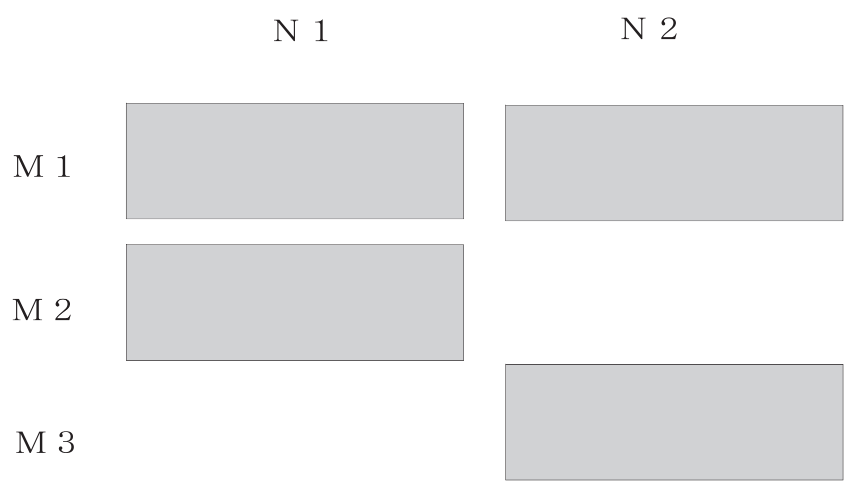
相補性条件（complementary slackness condition）

$$\left(b_i - \sum_{j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3} a_{ij} x_j \right) y_i = 0 \quad \forall i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

$$\left(c_j - \sum_{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3} a_{ij} y_i \right) x_j = 0 \quad \forall j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3$$

9 Dantzig–Wolfeの分解法 (1)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{j \in N_1 \cup N_2} c_j x_j & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N_1 \cup N_2} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in M_1 \\
& \displaystyle\sum_{j \in N_1} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in M_2 \\
& \displaystyle\sum_{j \in N_2} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in M_3 \\
& x_j \geq 0 & \forall j \in N_1 \cup N_2
\end{array}
$$



10　Dantzig–Wolfeの分解法 (2)

2番目の式の端点を表すベクトル $\boldsymbol{X}_1^k$ $(k \in K_1)$

$$x_j = \sum_{k \in K_1} X_1^{jk} \theta_1^k \quad \forall j \in N_1$$

$$\sum_{k \in K_1} \theta_1^k = 1$$

$$\theta_1^k \geq 0 \quad \forall k \in K_1$$

$$\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{k \in K_1} \sum_{j \in N_1} c_j X_1^{jk} \theta_1^k + \sum_{k \in K_2} \sum_{j \in N_2} c_j X_2^{jk} \theta_2^k & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{k \in K_1} \sum_{j \in N_1} a_{ij} X_1^{jk} \theta_1^k + \sum_{k \in K_2} \sum_{j \in N_2} a_{ij} X_2^{jk} \theta_2^k = b_i & \forall i \in M_1 \\
& \displaystyle\sum_{k \in K_1} \theta_1^k = 1 & \\
& \displaystyle\sum_{k \in K_2} \theta_2^k = 1 & \\
& \theta_1^k \geq 0 & \forall k \in K_1 \\
& \theta_2^k \geq 0 & \forall k \in K_2
\end{array}$$

11　Dantzig–Wolfeの分解法 (3)

$|K_1|, |K_2|$ の一部を利用した問題（制限付き主問題）

最初の式に対する双対変数ベクトルを y，2 番目の式に対する双対変数（スカラー）を r_1，3 番目の式に対する双対変数（スカラー）を r_2 とする．

変数 θ_1^k に対する被約費用：

$$\sum_{j \in N_1} c_j X_1^{jk} - \sum_{i \in M_1} y_i \sum_{j \in N_1} a_{ij} X_1^{jk} - r_1 - r_2$$

被約費用が負になる端点を見つけるための問題：

$$\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{j \in N_1} \left(c_j - \sum_{i \in M_1} y_i a_{ij} \right) x_j & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N_1} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in M_2 \\
 & x_j \geq 0 & \forall j \in N_1
\end{array}$$

12　Dantzig–Wolfeの分解法 (4)

列生成法

最適値が r_1 以上であれば，すべての端点ベクトル X_1^k に対して，

$$\sum_{j \in N_1} \left(c_j - \sum_{i \in M_1} y_i a_{ij} \right) X_1^{jk} \geq r_1$$

が成立するので，現在の基底解が最適になる．

r_1 未満であれば，被約費用が負になる端点が求まったことになるので，最適解 x をもとに，第 i $(\in M_1)$ 行が $\sum_{j \in N_1} a_{ij} x_j$，$|M_1|+1$ 行が 1，$|M_1|+2$ 行が 0 の列を追加して，再び制限つき主問題を解く．

13　ロバスト最適化 (1)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i \in M \end{array}$$

変数 x_j **は（負の値もとれる）実数変数**

制約の係数 a_{ij} **は不確実性もつ確率変数** $\tilde{a}_{ij}$ **であり，区間** $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ **内で変化**

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j \in N} c_j x_j & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \sum_{j \in N} \hat{a}_{ij} u_j \le b_i & \forall i \in M \\ & -u_j \le x_j \le u_j & \forall j \in N \\ & u_j \ge 0 & \forall j \in N \end{array}$$

14 ロバスト最適化 (2)

制約 i に対して，高々 Γ_i 個の変数が変化

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j \in N} c_j x_j \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \max_{S \subseteq N, |S| \leq \Gamma_i} \left\{ \sum_{j \in S} \hat{a}_{ij} |x_j| \right\} \leq b_i \quad \forall i \in M
\end{array}
$$

$$
\max_{S \in N, |S| \leq \Gamma_i} \left\{ \sum_{j \in S} \hat{a}_{ij} |x_j| \right\}
$$

の部分を（$|x_j|$ を定数と見なして）線形計画として記述：

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j \in N} \hat{a}_{ij} |x_j| z_{ij} \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in N} z_{ij} \leq \Gamma_i \\
& 0 \leq z_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in N
\end{array}
$$

15　ロバスト最適化 (3)

最初の式 $\sum_{j \in N} z_{ij} \le \Gamma_i$ **に対する双対変数を** θ_i**，**2 **番目の式** $z_{ij} \le 1$ **に対する双対変数を** y_{ij} **：**

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \Gamma_i \theta_i + \sum_{j \in N} y_{ij} & \\
\text{subject to} & \theta_i + y_{ij} \ge \hat{a}_{ij} |x_j| & \forall j \in N \\
& y_{ij} \ge 0 & \forall j \in N \\
& \theta_i \ge 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \sum_{j \in N} c_j x_j & \\
\text{subject to} & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \Gamma_i \theta_i + \sum_{j \in N} y_{ij} \le b_i & \forall i \in M \\
& \theta_i + y_{ij} \ge \hat{a}_{ij} u_j & \forall i \in M, j \in N \\
& -u_j \le x_j \le u_j & \forall j \in N \\
& y_{ij} \ge 0 & \forall i \in M, j \in N \\
& \theta_i \ge 0 & \forall i \in M \\
& u_j \ge 0 & \forall j \in N
\end{array}
$$