確率的在庫モデル

久保幹雄

kubo@logopt.com

東京海洋大学

新聞売り子モデル

h: 新聞 1 刊が売れ残ったときの在庫費用

b: 新聞 1 刊が品切れしたときの品切れ費用

D: 新聞の需要量を表す非負で連続確率変数
分布関数（微分可能）

$$F(x) = \Pr\{D \leq x\}$$

密度関数

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

総費用の期待値 $C(s)$

仕入れ量が s のときの総費用の期待値 $C(s)$

$$C(s) = \mathsf{E}\left[h[s-D]^{+} + b[s-D]^{-}\right]$$

ただし

$$(\cdot)^{+} = \max\{\cdot, 0\} \quad (\cdot)^{-} = \max\{-\cdot, 0\}$$

$$\begin{aligned} C(s) &= h\int_0^{\infty} \max\{s-x, 0\} f(x)dx + \\ &\quad b\int_0^{\infty} \max\{x-s, 0\} f(x)dx \\ &= h\int_0^{s} (s-x)f(x)dx + b\int_s^{\infty} (x-s)f(x)dx \end{aligned}$$

最適解の導出

一階偏微分

$$\frac{\partial C(s)}{\partial s} = h\int_0^s 1f(x)dx + b\int_s^\infty (-1)f(x)dx = hF(s) - b(1 - F(s))$$

二階偏微分

$$\frac{\partial^2 C(s)}{\partial s^2} = (h+b)f(s)\ (>0)$$

$C(s)$ は凸関数; $\partial C(s)/\partial s = hF(s) - b(1 - F(s)) = 0$

$$F(s^*) = \frac{b}{b+h}$$

基在庫方策（多段階モデル）

在庫地点が n 個直列に並んでいる．
点の順番は下流（需要地点側）から $1, 2, \cdots, n$
$n+1$ 番目には，点 n に品目を供給する外部の点（十分な在庫があり，品切れはしない）

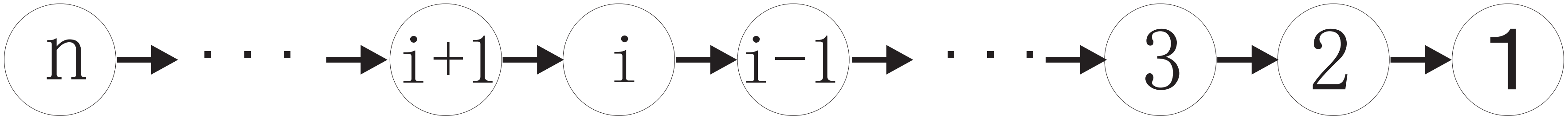

Figure 1: 直列多段階モデル.

用語と記号 (1)

t**:** 時刻を表すパラメータ

$I_i'(t)$**:** 第 i 段階における実在庫量

$B_i'(t)$**:** 第 i 段階におけるバックオーダー量

$IN_i'(t)$**:** 第 i 段階における**正味在庫**量

$$IN_i'(t) = I_i'(t) - B_i'(t)$$

$$I_i'(t) = [IN_i'(t)]^+$$

$$B_i'(t) = [IN_i'(t)]^-$$

用語と記号 (2)

$IO_i(t)$: 第 i 段階における**注文中在庫量**

$IT_i(t)$: 第 i 段階における**輸送中在庫量**

$$IO_i(t) - IT_i(t) = B'_{i+1}(t)$$

$IOP'_i(t)$: 第 i 段階における**在庫発注ポジション**; 正味在庫量に注文中在庫量を加えた量

$$IOP'_i(t) = IN'_i(t) + IO_i(t)$$

$ITP'_i(t)$: 第 i 段階における**在庫輸送ポジション**; 正味在庫量に輸送中在庫量を加えた量

$$ITP'_i(t) = IN'_i(t) + IT_i(t)$$

$$IOP'_i(t) - ITP'_i(t) = B'_{i+1}(t)$$

用語と記号 **(3)**

L_i'**:** 第 i 段階におけるリード時間

$D(s,t]$**:** 時刻 s から t までに発生する需要量を表す確率変数

s_i'**:** **基在庫レベル**; 在庫発注ポジション $IOP_i'(t)$ を s_i' に保つように発注

b**:** 単位時間，単位バックオーダー量あたりの品切れ費用

h_i'**:** 第 i 段階における単位時間，単位在庫量あたりの在庫保管費用.

在庫フロー保存式

在庫フロー保存式

$$IN_i'(t+L_i') = ITP_i'(t) - D(t, t+L_i']$$

$IOP_i'(t) - ITP_i'(t) = B_{i+1}'(t)$ を代入して,

$$IN_i'(t+L_i') = s_i' - B_{i+1}'(t) - D(t, t+L_i']$$

定常状態における再帰式

D_i：定常時におけるリード時間内の需要 $D(t, t+L_i']$ の均衡値
$B_i'(t) = [IN_i'(t)]^-$ より

$$B_{n+1}' = 0$$

$$B_i' = \left[s_i' - B_{i+1}' - D_i\right]^-$$

エシェロン在庫モデル（用語と記号）

$I_i(t)$**:** 第 i 段階におけるエシェロン在庫量

$$I_i(t) = I'_i(t) + \sum_{j<i} \{IT_j(t) + I'_j(t)\}$$

$B(t)$**:** システム全体でのバックオーダー量

$$B(t) = B'_1(t)$$

$IN_i(t)$**:** 第 i 段階における**正味エシェロン在庫**量

$$IN_i(t) = I_i(t) - B(t)$$

用語と記号（続き）

$IOP_i(t)$**:** 第 i 段階における**エシェロン在庫発注ポジション**

$$IOP_i(t) = IN_i(t) + IO_i(t)$$

$ITP_i(t)$**:** 第 i 段階における**エシェロン在庫輸送ポジション**

$$ITP_i(t) = IN_i(t) + IT_i(t)$$

s_i**: エシェロン基在庫レベル**

第 i 段階におけるエシェロン在庫発注ポジション $IOP_i(t)$ を，常にエシェロン基在庫レベル s_i に保つように発注

在庫フロー保存式

h_i: 第 i 段階のエシェロン在庫費用

$$h_i = h'_i - h'_{i+1}$$

エシェロン在庫に対するフロー保存式

$$IN_i(t + L'_i) = ITP_i(t) - D(t, t + L'_i]$$

$$ITP_i(t) = \min\{s_i, IN_{i+1}(t)\}$$

均衡解

D_i は $D(t, t+L_i']$ の均衡値

$$ITP_n = s_n$$

$$IN_i = ITP_i - D_i$$

$$ITP_i = \min\{s_i, IN_{i+1}\}$$

目的関数

実在庫モデル

$$\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} h'_i I'_i + \sum_{i=2}^{n} h'_i IT_{i-1} + bB'_1\right]$$

エシェロン在庫モデル

$$\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i IN_i + (b + h'_1)B\right]$$

最適解の導出(1)

$\bar{C}_i(x)$: 第 $i+1$ 段階の地点での正味エシェロン在庫量が x のときの，第 i 段階までの最小費用.

$\hat{C}_i(x)$: 第 i 段階での正味エシェロン在庫量 IN_i が x のときの，第 i 段階までの最小費用

$C_i(y)$: 第 i 段階でのエシェロン在庫輸送ポジション ITP_i が y のときの，第 i 段階までの最小費用

初期条件

$$\bar{C}_0(x) = (b + h'_1)[x]^-$$

最適解の導出(2)

第 i 段階での正味エシェロン在庫量 IN_i が x のときの,
第 i 段階までの最小費用 $\hat{C}_i(x)$

$$\hat{C}_i(x) = h_i x + \bar{C}_{i-1}(x)$$

第 i 段階でのエシェロン在庫輸送ポジション ITP_i が y のときの，第 i 段階までの最小費用 $C_i(y)$

$$C_i(y) = \mathsf{E}\left[\hat{C}_i(y - D_i)\right]$$

第 $i+1$ 段階の地点での正味エシェロン在庫量が x のときの,
第 i 段階までの最小費用 $\bar{C}_i(x)$

$$\bar{C}_i(x) = C_i(\min\{s_i^*, x\})$$

最適解の導出(3)

エシェロン基在庫レベル s_i^*

$$s_i^* = \arg\min C_i(y)$$

エシェロン基在庫レベルが非減少になるように変更

$$s_i^{-*} = \min_{i \le j} s_j^*$$

実在庫量に基づく最適な基在庫レベル $s_i'^*$

$$s_i'^* = s_i^{-*} - s_{i-1}^{-*}$$

ただし，s_0^{-*} は 0

定期発注方策（1 段階モデル）

D_t: t 期における需要量

L: **リード時間**；t 期の期末に発注された商品は，$t+L+1$ 期の期首に到着

s: 基在庫レベル；期首から期末にかけて需要 D_t が発生し，その後発注

c: 発注量の上限（容量）

q_t: t 期における発注量

$$q_t = \min\left\{c, [s - (I_t - D_t + T_t)]^+\right\}$$

定期発注方策（記号）

I_t: t 期の期首における正味在庫量

$$I_{t+1} = I_t - D_t + q_{t-L}$$

T_t: t 期の期首における輸送中在庫量

$$T_{t+1} = T_t + q_t - q_{t-L}$$

b: 単位期間，単位バックオーダー量あたりの品切れ費用

h: 単位期間，単位在庫量あたりの在庫保管費用

期待費用

t 期の費用を表す確率変数 C_t
期首における（過去の注文を受け取った後の）正味在庫量で測定

$$C_t = b[I_t]^- + h[I_t]^+$$

目的関数は，t_{max} 期の期待費用

$$\frac{1}{t_{max}} \sum_{t=1}^{t_{max}} \mathsf{E}[C_t]$$

$\Rightarrow$ シミュレーションをしながら，目的関数の s による微分値の期待値を計算

s で微分

$$\frac{dI_{t+1}}{ds} = \frac{I_t}{ds} + \frac{dq_{t-L}}{ds}$$

$$\frac{dT_{t+1}}{ds} = \frac{dT_t}{ds} + \frac{dq_t}{ds} - \frac{dq_{t-L}}{ds}$$

$$\frac{dq_t}{ds} = \begin{cases} 0 & \text{容量制約が制約のとき} \\ 1 - \left(\frac{dI_t}{ds} + \frac{dT_t}{ds}\right) & \text{それ以外} \end{cases}$$

在庫量の初期値は，$I_0 = s$
$\Rightarrow$ 在庫量の微分値の初期値は，$I_0' = 1$
他の変数の微分値 $(T_0)', (q_0)'$ は 0

費用関数 C_t の微分

$$(C_t)' = -b(I_t)'\mathbf{1}[I_t < 0] + h(I_t)'\mathbf{1}[I_t > 0]$$

目的関数（C_t の期待値）の s による微分は，確率 1 で微分値の期待値

$$\mathsf{E}\left[\frac{1}{t_{max}}\sum_{t=1}^{t_{max}}(C_t)'\right]$$

に収束

$\Rightarrow$ $(C_t)'$ の期待値が負ならば基在庫レベル s を増やし，正ならば減らす.

定期発注方策（多段階モデル）

エシェロン基在庫方策

エシェロン基在庫レベル s^i を与えたとき，期末のエシェロン在庫ポジション

$$\sum_{j=1}^{i}(I_t^j + T_t^j) - D_t$$

を s_i にするように発注を行う方策

発注量

$$q_t^i = \min\left\{ c_i, \left[s^i + D_t - \sum_{j=1}^{i}(I_t^j + T_t^j) \right]^+, [I_t^{i+1}]^+ \right\}$$

正味在庫と輸送中在庫の再帰式

$$I^i_{t+1} = I^i_t - q^{i-1}_t + q^i_{t-L_i}$$

$$T^i_{t+1} = T^i_t + q^i_t - q^i_{t-L_i}$$

初期条件: $I^1_0 = s^1$, $I^i_0 = s^i - s^{i-1}, i = 2, \cdots, m$
その他の変数については，すべて 0

費用関数と期待値

t 期の費用を表す確率変数

$$C_t = b[I_t^1]^- + h^1[I_t^1]^+ + \sum_{j=2}^{m} h^j(I_t^j + T_t^{j-1})$$

b は品切れ費用（最終需要地点のみ）
h^i は i 段階の在庫費用
期待費用

$$\frac{1}{t_{max}} \sum_{t=1}^{t_{max}} \mathsf{E}[C_t]$$

シミュレーションをしながら，目的関数の各 i に対する s^i による微分値の期待値を計算

再帰式の微分

$$\frac{dq_t^i}{ds^*} = \begin{cases} 0 & \text{容量制約が制約} \\ 0 & \text{発注量が 0} \\ (I_t^{i+1})' & \text{上流在庫が制約} \\ \mathsf{1}[i = i^*] - \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{dI_t^j}{ds^*} + \frac{dT_t^j}{ds^*} \right) & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\frac{dI_{t+1}^i}{ds^*} = \frac{I_t^i}{ds^*} - \frac{dq_t^{i-1}}{ds^*} + \frac{dq_{t-L_i}^i}{ds^*}$$

$$\frac{dT_{t+1}^i}{ds^*} = \frac{dT_t^i}{ds^*} + \frac{dq_t^i}{ds^*} - \frac{dq_{t-L_i}^i}{ds^*}$$

費用関数の微分

費用関数の微分

$$
\begin{aligned}
(C_t)' = -b(I_t^1)'\mathbf{1}[I_t^1 < 0] + h_1(I_t^1)'\mathbf{1}[I_t^1 > 0] \\
+ \sum_{i=2}^{m} h_i \left\{ (T_t^i)' + (I_t^{i-1})' \right\}
\end{aligned}
$$

期待値

$$
\mathsf{E}\left[\frac{1}{t_{max}} \sum_{t=1}^{t_{max}} (C_t)' \right]
$$

固定費用付き在庫問題

I_t: t 期の期首における正味在庫量

$$I_{t+1} = I_t - D_t + q_{t-L}$$

変形

$$I_{t+1} = I_0 + \sum_{k=0}^{t} (q_{k-L} - D_k)$$

在庫費用 h，品切れ費用 b，期待費用 C_t

$$C_t = b[I_t]^- + h[I_t]^+$$

制約で表現

$$C_t \geq hI_t$$

$$C_t \geq -bI_t$$

定式化

発注固定費用 K，0-1 変数 ξ_t，大きな数 M

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{t=1}^{t_{max}} (K\xi_t + C_t) & \\
\text{subject to} & C_t \geq h \left\{ I_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{t} (q_{k-L} - D_k) \right\} & \forall t \\
& C_t \geq -b \left\{ I_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{t} (q_{k-L} - D_k) \right\} & \forall t \\
& 0 \leq q_t \leq M\xi_t & \forall t \\
& \xi_t \in \{0, 1\} & \forall t
\end{array}
$$

ロバスト計画

需要量 $D_t \in [\bar{D}_t - \hat{D}_t, \bar{D}_t + \hat{D}_t]$

ばらつきを表すパラメータ Γ_t

平均からのずれを表す変数 $0 \leq z_{kt} \leq 1$

$$C_t \geq h \left\{ I_0 + \sum_{k=0}^{t} \left(q_{k-L} - \bar{D}_k \right) + \max_{\sum_k z_{kt} \leq \Gamma_t} \sum_{k=0}^{t} \hat{D}_k z_{kt} \right\}$$

$z_{kt} \leq 1$ に対する双対変数 y_{kt}

$\sum_{k=0}^{t} z_{kt} \leq \Gamma_t$ に対する双対変数 θ_t

ロバスト計画（混合整数計画）

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{t_{max}} (K\xi_t + C_t) & \\
\text{subject to} \quad & C_t \geq h\left\{ I_0 + \sum_{k=0}^{t} \left(q_{k-L} - \bar{D}_k\right) + \theta_t \Gamma_t + \sum_{k=0}^{t} y_{kt} \right\} & \forall t \\
& C_t \geq -b\left\{ I_0 + \sum_{k=0}^{t} \left(q_{k-L} - \bar{D}_k\right) - \theta_t \Gamma_t - \sum_{k=0}^{t} y_{kt} \right\} & \forall t \\
& \theta_t + y_{kt} \geq \hat{D}_k & \forall k, \\
& 0 \leq q_t \leq M\xi_t & \forall t \\
& \xi_t \in \{0, 1\} & \forall t
\end{aligned}
$$